KRIVE I POVRŠI

Kriva L u prostoru se zadaje *parametarski* na sledeći način:

$$L : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad t \in I, \tag{1}$$

(*skalarni* oblik), ili

$$L : \vec{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big), \quad t \in I \tag{1'}$$

(*vektorski* oblik), gde je $I \subset R$ interval u širem smislu (otvoren, zatvoren, poluotvoren, konačan ili beskonačan), a funkcije $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ neprekidne, diferencijabilne ili neprekidno-diferencijabilne, zavisno od potrebe.

Kriva L može još biti zadata i na sledeće načine:

$$L : \begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x), \end{cases} \quad x \in I \tag{2}$$

(*eksplicitni* oblik);

$$L : \begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

(*implicitni oblik*).

Površ S ($S \subset \mathbb{R}^3$) se zadaje *parametarski* na sledeći način:

$$S : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}, \quad (u, v) \in \triangle \tag{4}$$

(*skalarni* oblik), ili

$$S : \vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \tag{4'}$$

(*vektorski* oblik), gde je $\triangle$ dvodimenzionalni povezan skup u ravni uOv, a $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ su funkcije dve promenljive koje zadovoljavaju slične uslove kao što je spomenuto za funkcije date u (1).

Ostali oblici jednačina površi S:

$$S : z = z(x, y), (x, y) \in D \quad (D \subset xOy) \tag{5}$$

(*eksplicitni* oblik);

$$S : F(x,y,z) = 0 \tag{6}$$

(*implicitni* oblik).

1° Ako tačka $M_0(x_0, y_0, z_0)$ pripada L, tj. ako se koordinate x_0, y_0, z_0 te tačke dobijaju iz sistema (1) za neko $t = t_0$ (ako je u pitanju parametarski oblik), ili za $x = x_0$ iz (2), ili, pak, zadovoljavaju sistem (3), tada *jednačina tangente na krivu L u tački $M_0(x_0, y_0, z_0)$* glasi:

$$\tau : \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}. \tag{7}$$

gde je $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \neq \vec{0}$ vektor tangente, koji u zavisnosti od načina zadavanja krive L ((1), (2) ili (3)) ima redom oblik:

$$\vec{a} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)); \tag{8}$$

$$\vec{a} = (1, y'(x_0), z'(x_0)); \tag{9}$$

$$\vec{a} = \left(\begin{vmatrix} F'_{1y} & F'_{1z} \\ F'_{2y} & F'_{2z} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F'_{1z} & F'_{1x} \\ F'_{2z} & F'_{2x} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F'_{1x} & F'_{1y} \\ F'_{2x} & F'_{2y} \end{vmatrix} \right) \tag{10}$$

(gde su svi parcijalni izvodi izračunati u tački M_0).

Jednačina normalne ravni η krive L u tački $M_0(x_0, y_0, z_0)$ glasi:

$$\eta : a_1(x - x_0) + a_2(y - y_0) + a_3(z - z_0) = 0, \tag{11}$$

gde je $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ $(\neq \vec{0})$ vektor tangente krive L u tački M_0, a koji ima prethodno spomenute oblike (zavisno od načina zadavanja krive L).

2° *Jednačina tangentne ravni površi S u tački $M_0(x_0, y_0, z_0)$* te površi glasi:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \tag{12}$$

gde je $\vec{n} = (A, B, C)$ vektor normale te površi u tački M_0. U zavisnosti od oblika jednačine površi S, (4), (5) ili (6), imamo redom sledeće vrednosti vektora $\vec{n}$:

$$\vec{n} = \left(\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \right) \tag{13}$$

gde su parcijalni izvodi izračunati za $u = u_0$ i $v = v_0$, koji odgovaraju tački M_0;

$$\vec{n} = (z'_x(x_0, y_0), z'_y(x_0, y_0), -1); \tag{14}$$

$$\vec{n} = (F'_x(x_0, y_0, z_0), F'_y(x_0, y_0, z_0), F'_z(x_0, y_0, z_0)). \tag{15}$$

Jednačine normale površi u tački $M_0(x_0, y_0, z_0)$ te površi glase:

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C},$$

gde je $\vec{n} = (A, B, C)$ prethodno spomenuti vektor normale površi koji ima jedan od oblika (13), (14) ili (15).

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix} = 0$$ jedn. ock. ravni u $M(x_1, y_1, z_1)$

$\vec{t} \perp \vec{b}$

$\vec{t} \perp \vec{n}$

$\vec{b} \perp \vec{n}$

$\dot{x}(x-x_1) + \dot{y}(y-y_1) + \dot{z}(z-z_1) = 0$ jedn. norm. ravni

$\ddot{x}(x-x_1) + \ddot{y}(y-y_1) + \ddot{z}(z-z_1) = 0$ jedn. rektif. ravni

VI GLAVA

DIFERENCIJALNA GEOMETRIJA

§ 1. Krive u prostoru

Ako je u trodimenzionalnom euklidskom prostoru kriva zadata jednačinom

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} ,$$

ili u parametarskom obliku

$$x = x(t) , \quad y = y(t), \quad z = z(t) ,$$

tada je dužina luka krive od tačke sa parametrom t_o *do tačke sa parametrom* t_1 *data formulom*

$$s = \int_{t_o}^{t_1} ds = \int_{t_o}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt.$$

Vektor tangente, binormale i normale krive odredjujemo formulama

$$\vec{t} = \dot{\vec{r}}, \quad \vec{b} = \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}, \quad \vec{n} = \vec{b} \times \vec{t} \quad \left(\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} , \ \ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \ \dddot{\vec{r}} = \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right)$$

i njihove ortove ćemo obeležiti respektivno sa

$$\vec{t}_o, \ \vec{b}_o, \ \vec{n}_o.$$

Tačka M *, vektori* $\vec{t}$ *i* $\vec{n}$ *odredjuju oskulatornu ravan,* M,$\vec{b}$ *i* $\vec{n}$ *normalnu ravan, a* M,$\vec{b}$ *i* $\vec{t}$ *rektifikacionu ravan krive u tački* M *krive.*

Polúprečnik krivine R *i krivina* K *su odredjeni relacijama*

$$\frac{1}{K^2} = R^2 = \frac{|\dot{\vec{r}}^2|^3}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2} \qquad tj. \quad R = \frac{|\vec{t}|^3}{|\vec{b}|} .$$

Poluprečnik torzije,±T,je dat formulom:

$$T = -\frac{[\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}]^2}{\dddot{\vec{r}}[\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}]} = \frac{[\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}]^2}{\dddot{\vec{r}}[\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}]} = \frac{|\vec{b}|^2}{\dddot{\vec{r}} \cdot \vec{b}} .$$

Torziju ćemo označiti sa $\frac{1}{T}$ *. Ako je u jednačini krive parametar* t *jednak dužini luka* s *, tada je*

$$\varkappa = K = \frac{1}{R} = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| = |\vec{r}\,''|$$

a

$$-\tau = \frac{1}{T} = \pm\left|\frac{d\vec{b}_o}{ds}\right| . \qquad\qquad K = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}$$

Frenetovi obrasci glase:

$$\frac{d\vec{t}_o}{ds} = \frac{\vec{n}_o}{R} , \qquad\qquad \frac{d\vec{t}_o}{ds} = K\vec{n}_o$$

$$\frac{d\vec{n}_o}{ds} = -\frac{\vec{t}_o}{R} - \frac{\vec{b}_o}{T} , \qquad\qquad \frac{d\vec{n}_o}{ds} = -K\vec{t}_o + \tau\vec{b}_o$$

$$\frac{d\vec{b}_o}{ds} = \frac{\vec{n}_o}{T} . \qquad\qquad \frac{d\vec{b}_o}{ds} = -\tau\vec{n}_o$$

Obvojnica familije ravnih krivih F(x,y,a) = 0 *se dobije eliminisanjem parametra* a *iz jednačine*

$$\frac{\partial F(x,y,a)}{\partial a} = 0 , \qquad F(x,y,a) = 0 .$$

§ 2. Površi u prostoru

Neka je površ data vektorskom jednačinom

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$$

ili u parametarskom obliku

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v)$$

gde je Jacobijeva matrica

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}$$

ranga 2. Tada je vektor normale $\vec{n}$ *na površ dat sa*

$$\vec{n} = [\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'], \quad \vec{r}_u' = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \quad \vec{r}_v' = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$$

Ako je površ zadata jednačinom

$$F(x,y,z) = 0,$$

tada je

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right).$$

Ako je površ zadata jednačinom

tada je

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right).$$

Jednačina tangentne ravni površi u tački M_o *odredjenoj vektorom položaja* $\vec{r}_o$ *je*

$$(\vec{r} - \vec{r}_o)\vec{n}_{M_o} = 0.$$

Ako familija površi $f(x,y,z,a) = 0$ *ima obvojnu površ, to ona sva leži na površi* $F(x,y,z) = 0$ *koja se dobija eliminacijom parametra* a *iz jednačina*

$$f(x,y,z,a) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial a} = 0.$$

Ako dvoparametarska površ $f(x,y,z,a,b) = 0$ *ima obvojnu površ to sve njene tačke zadovoljavaju jednačinu* $F(x,y,z) = 0$ *koja se dobija eliminacijom parametara* a *i* b *iz jednačina*

$$f(x,y,z,a,b) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial b} = 0,$$

no tu jednačinu mogu zadovoljiti i druge tačke.

§3. Krive linije na površi

Neka je površ data jednačinom $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$. *Tada je prva osnovna forma* F_1 *površi odredjena sa*

$$F_1 = ds^2 = (d\vec{r} \cdot d\vec{r}) = (d\vec{r})^2 ,$$

gde je $$d\vec{r} = \vec{r}_u' du + \vec{r}_v' dv .$$

Može se pisati da je

$$F_1 = E\,du^2 + 2F du dv + G dv^2 ,$$

$$E = (\vec{r}_u')^2 , \quad F = (\vec{r}_u' \cdot \vec{r}_v'), \quad G = (\vec{r}_v' \cdot \vec{r}_v').$$

Jedinični vektor normale površi je odredjen sa

$$\vec{n}_o = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'}{\sqrt{EG - F^2}} .$$

Druga osnovna forma površi je

$$F_2 = (d^2\vec{r} \cdot \vec{n}_o) = -(d\vec{r} \cdot d\vec{n}_o) = L\,du^2 + 2M du dv + N dv^2 ,$$

gde je

$$d^2\vec{r} = \vec{r}''_{uu} du^2 + 2\vec{r}'_{uv} du\,dv + \vec{r}''_{vv} dv^2 .$$

Neka je K *krivina površi u tački* (u,v) *u pravcu* (du,dv), *a* $R = \frac{1}{K}$ *poluprečnik krive* c *dobivene normalnim presekom površi u tom* *pravcu. Tada je*

$$K = \frac{1}{R} = \frac{F_2}{F_1} = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} .$$

Podelivši i brojitelj i imenitelj gornjeg razlomka sa dv^2 *dobijamo* K *kao funkciju od* u,v *i* $\frac{du}{dv}$:

$$K = f(u,v,\frac{du}{dv}) .$$

Pravci za koje K *ima maksimalnu i minimalnu vrednost u fiksiranoj tački* (u,v) *zovu se glavni pravci u toj tački. Mogu se dobiti kao rešenja jednačine*

$$K'_x = 0 \qquad \textit{gde je} \qquad x = \frac{du}{dv} .$$

Glavnim pravcima odgovaraju glavne krivine, i one mogu biti odredjene i kao koreni jednačine

$$(a)\qquad (EG-F^2)K^2 - (EN-2FM+GL)K + (LN-M^2) = 0 .$$

Ako su K_1 *i* K_2 *glavne krivine, tada su* $R_1 = \frac{1}{K_1}$ i $R_2 = \frac{1}{K_2}$ *glavni poluprečnici.* $\frac{1}{2}(K_1+K_2)$ *zove se srednja krivina, a* $K_1 K_2$ *se zove Gaussova krivina površi. Iz jednačine (a) imamo*

$$K_1 K_2 = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} , \quad K_1 + K_2 = \frac{EN-2FM+GL}{EG-F^2} .$$

Gaussova krivina površi se može izračunati i preko formule

$$K = \frac{R_{1212}}{g}$$

Kriva na površi čija tangenta u svakoj tački ima pravac jednog od glavnih pravaca u toj tački, zove se linija krivine krive te površi.

Ako su x_1 *i* x_2 *rešenja jednačine* $K'_x = 0$, *to je*

$$x_1 = \left(\frac{du}{dv}\right)_1 = f_1(u,v)$$

$$x_2 = \left(\frac{du}{dv}\right)_2 = f_2(u,v) .$$

Integralne krive gornjih diferencijalnih jednačina su linije krive. Ako je u nekoj tački $K'_x \equiv 0$, *tada je svaki pravac glavni* *pravac, tj. normalna krivina je ista za svaki pravac u toj tački, i ta tačka se zove pupčasta tačka površi.*

Kako je

$$K = \frac{Lx^2 + 2Mx + N}{Ex^2 + 2Fx + G} \quad , \quad x = \frac{du}{dv} \quad ,$$

to je $K'_x = 0$ *za ono* x *koje je rešenje jednačine*

$$(FL-ME)x^2 + (GL-NE)x + (GM-FN) = 0 \ ,$$

tj.

$$\begin{vmatrix} -1 & x & -x^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

Posle množenja prve vrste sa dv^2 *dobijamo*

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

što predstavlja diferencijalnu jednačinu linije krivine.

Koristeći Rodrigovu formulu koja kaže da je za glavne pravce, tj. za pravce u kojima je glavna krivina ekstramalna, imamo još i sledeće diferencijalne jednačine linije krive:

$$d\vec{n}_o = \lambda\, d\vec{r}$$

što povlači da je

$$d\vec{r} \cdot [\vec{n} \times d\vec{n}] = 0$$

Kako u prvoj aproksimaciji $\frac{1}{2} F_2$ *predstavlja rastojanje* d *tačke* $\vec{r}(u+du,\ v+dv)$ *od tangentne ravni površi povučene u tački* $\vec{r}(u,v)$*, to će biti istog znaka za svako* x*, tj. za svaki pravac* $\frac{du}{dv}$ *ako je diskriminanta kvadratnog trinoma*

(b) $\qquad Lx^2 + 2Mx + N$

negativna, tj. ako je $M^2 - LN < 0$ *i takva tačka površi se zove eliptična tačka. U okolini te tačke površ je sa iste strane tangentne ravni.*

Ako je diskriminanta od (b) pozitivna, tj. $M^2 - LN > 0$ *, tada će postojati pravci* $\frac{du}{dv}$ *za koje je* $F_2 > 0$ *i takvi za koje je* $F_2 < 0$*, tj. površ će u toj tački biti sa razne strane tangentne ravni. Takva tačka se zove hiperbolična tačka površi. Pravci za koje je* $F_2 = 0$ *tj.* $Lx^2 + 2Mx + N = 0$ *zovu se asimptotski pravci u odredjenoj tački i u tim pravcima tangentna ravan dodiruje površ. Kriva na površi čija je tangenta u svakoj tački kolinearna sa asimptotskim pravcem u toj tački zove se asimptotska linija površi. Normalna krivina asimptotskih linija je nula. Dobijaju se kao integralne krive diferencijalne jednačine* $F_2 = 0$*. Iz svake hiperbolične tačke površi izlaze dve asimptotske linije.*

Ako je $M^2 - LN = 0$*, tada jednačina* $Lx^2 + 2Mx + N$ *ima jednu dvostruku nulu i postoji samo jedan pravac duž koje tangentna ravan dodiruje površ. Takva tačka površi zove se parabolična tačka površi.*

Ako glavna normala krive c_1 *zaklapa sa normalom površi ugao* θ *, tada je (*c_1 *leži na površi)*

$$R_1 = \pm R \cos \theta$$

gde je R_1 *poluprečnik krivine krive* c_1*, a* R *poluprečnik krivine krive* c*, koja se dobija normalnim presekom površi u tački krive* c_1 *i u pravcu iste. Oskulatorna ravan krive* c *sadrži tangentu krive* c_1 *i normalu površi. (*c *i* c_1 *imaju istu tangentu).*

Kriva na površi koja je normalna na nivoskoj liniji površi $z = 0$ *zove se linija najvećeg nagiba.*

Krive na površi kod kojih se glavna normala površi poklapa sa glavnom normalom krive u svakoj tački krive zovu se geodezijske linije površi.

Normala površi je tada normalna na binormalu krive, tj. važi

$$\vec{n} \cdot [d\vec{r} \times d^2\vec{r}] = 0$$

tj.

$$[\vec{r}_u' \times \vec{r}_v] \cdot [d\vec{r} \times d^2\vec{r}] = 0 .$$

Dio tablica integrala.

1. $\int u^a \mathrm{d}u = \frac{u^{a+1}}{a+1} + C,\ a \neq -1.$
2. $\int u^{-1} \mathrm{d}u = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int \frac{u'}{u} \mathrm{d}x = \ln|u| + C.$
3. $\int a^u \mathrm{d}u = \frac{a^u}{\ln|a|} + C; \int e^u \mathrm{d}u = e^u + C.$
4. $\int \sin \mathrm{d}u = -\cos u + C.$
5. $\int \cos \mathrm{d}u = \sin u + C.$
6. $\int \frac{1}{\cos^2 u} \mathrm{d}u = \operatorname{tg} u + C.$
7. $\int \frac{1}{\sin^2 u} \mathrm{d}u = -\operatorname{ctg} u + C.$
8. $\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{a} + C.$
9. $\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C.$
10. $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C.$
11. $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2 + a}} = \ln|u + \sqrt{u^2 + a}| + C.$

Newton-Leibnizova formula.

$$\int_a^b f(u)\mathrm{d}u = \int f(u)\mathrm{d}u\Big|_a^b = F(u)|_a^b = F(b) - F(a), \text{ gdje je } F'(u) = f(u).$$

Osobine određenih integrala.

1. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$
2. $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0.$
3. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$
4. $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f_3(x)\mathrm{d}x.$
5. $\int_a^b c\, f(x)\mathrm{d}x = c \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

Smjena promjenjivih u određenom integralu.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} x = \varphi(t) & x = a \Rightarrow a = \varphi(\alpha) \Rightarrow t = \alpha \\ dx = \varphi'(t)\mathrm{d}t & x = b \Rightarrow b = \varphi(\beta) \Rightarrow t = \beta \end{array} \right| = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta h(t)\mathrm{d}t$$

Nepravi integrali. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,\ \int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,...

Računanje površine ravne figure. U zavisnosti od izgleda slike: $P = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, $P = \int_c^d g(y)\mathrm{d}y$, $P = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, $P = \int_a^b [\eta(x) - \mu(x)]\mathrm{d}x$, $P = \int_c^d [g(y) - h(y)]\mathrm{d}y$, ...

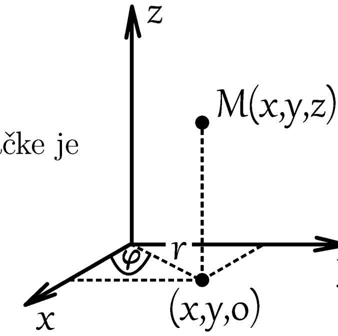
Zapremina rotacionog tijela. Ako, kriva data u parametarskom obliku $C : \begin{cases} x = \eta(t) \\ y = \mu(t) \\ t_1 \leq t \leq t_2 \end{cases}$ rotira oko x-ose, zapremine se računa po formuli

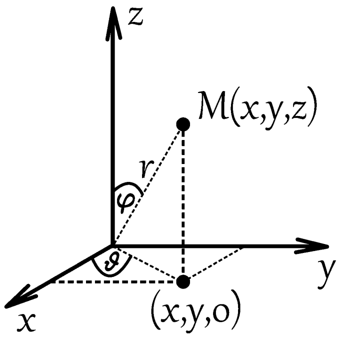
$$V_x = \pi \int_{t_1}^{t_2} [\mu(t)]^2 |\eta'(t)|\mathrm{d}t.$$

Ista kriva ako rotira oko y-ose, $V_y = \pi \int_{t_1}^{t_2} [\eta(t)]^2 |\mu'(t)|\mathrm{d}t$. Iz ove dvije formule, za funkcije $y = f(x)$ i $x = g(y)$, slijedi $V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \mathrm{d}x$ i $V_y = \pi \int_c^d [g(y)]^2 \mathrm{d}y$.

Računanje trojnih integrala uvođenjem cilindričnih i sfernih koordinata.

Na cilindrične koordinate prelazimo pomoću $\begin{cases} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \\ z = z \\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z \end{cases}$, opis tačke je





Za prelazak sa pravougaonih na sferne koordinate koristimo sljedeće smjene $\begin{cases} x = r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ y = r\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ z = r\cos(\varphi) \\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = r^2\sin(\varphi)\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \end{cases}$,
(opis tačke je prikazan na slici lijevo).

Primjena dvostrukih integrala.

$$(a)\ P = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad (b)\ V = \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Primjena trostrukih integrala. $(a)\ V = \iiint\limits_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

$(b)\ T(x_T, y_T, z_T),\ \ x_T = \dfrac{1}{V}\iiint\limits_\Omega x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, y_T = \dfrac{1}{V}\iiint\limits_\Omega y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, z_T = \dfrac{1}{V}\iiint\limits_\Omega z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

Krivoliniski integral prve vrste (po luku).

$C: \begin{cases} x = \eta(t) \\ y = \mu(t) \\ t_1 \le t \le t_2 \end{cases}, \qquad \int\limits_C f(x,y)\mathrm{d}s = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\eta(t),\mu(t))\sqrt{(\eta'(t))^2 + (\mu'(t))^2}\mathrm{d}t.$

$C: \begin{cases} y = f(x) \\ a \le x \le b \end{cases}, \qquad \int\limits_C z(x,y)\mathrm{d}s = \int\limits_a^b z(x,f(x))\sqrt{1 + (f'(x))^2}\mathrm{d}x.$

Primjena krivoliniskog integrala prve vrste - Računanje površine cilindrične površi.

$$C: \begin{cases} F(x,y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \qquad P = \int\limits_C z(x,y)\mathrm{d}s.$$

Krivoliniski integral druge vrste (po koordinatama).

$C: \begin{cases} x = \eta(t) \\ y = \mu(t) \\ t_1 \le t \le t_2 \end{cases}, \qquad \int\limits_C P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int\limits_{t_1}^{t_2} [P(\eta(t),\mu(t))\eta'(t) + Q(\eta(t),\mu(t))\mu'(t)]\mathrm{d}t.$

$C: \begin{cases} y = f(x) \\ a \le x \le b \end{cases}, \qquad \int\limits_C P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int\limits_a^b [P(x,f(x)) + Q(x,f(x))f'(x)]\mathrm{d}x.$

Krivoliniski integral druge vrste <u>*ovisi o smjeru puta integracije*</u>.

Formula Greena.

$$\int\limits_C P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Primjena krivoliniskog integrala druge vrste - Računanje površine ravne figure.

$$P = \frac{1}{2}\int\limits_C x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x.$$

Nezavisnost krivoliniskog integrala od vrste konture. Određivanje primitivnih funkcija.

$\ldots,\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y},\ \ldots,\ \mathrm{d}u(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y,\ \ldots$

Površinski integral prve vrste.

D projekcija od S: $z=\eta(x,y)$ na $x0y$ - $\iint\limits_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_D f(x,y,\eta(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

E projekcija od S: $y=\mu(x,z)$ na $x0z$ - $\iint\limits_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_E f(x,\mu(x,z),z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}z.$

F projekcija od S: $x=\gamma(y,z)$ na $y0z$ - $\iint\limits_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_F f(\gamma(y,z),y,z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

Površinski integral druge vrste.

Ako je integral oblika $\iint\limits_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ obično ga podjelimo na tri dijela $\iint\limits_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\iint\limits_S Q(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z$, $\iint\limits_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Neka je $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ vektor normale na površinu S, gdje su α, β i γ uglovi koje vektor normale zaklapa sa x, y i z osom. Tada

$$I_1=\iint\limits_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\left|\begin{array}{c}S: x=\eta(y,z),\\ \text{neka je } D \text{ projekcija od } S \text{ na } y0z \text{ ravan,}\\ \text{neka je } \alpha \text{ ugao koji vektor}\\ \text{normale na } S \text{ zaklapa sa } x\text{-osom,}\end{array}\right|=\pm\iint\limits_D P(\eta(y,z),y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \text{ gdje}$$

vrijednost za $\pm$ zavisi od $\cos(\alpha)$ ($\cos(\alpha)>0$ stavljamo +, za $\cos(\alpha)<0$ stavljamo -, a za $\cos(\alpha)=0$ imamo $I_1=0$). Slično za I_2 i I_3

$$I_2=\iint\limits_S Q(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z=\left|\begin{array}{c}S: y=\mu(x,z),\\ \text{neka je } E \text{ projekcija od } S \text{ na } x0z \text{ ravan,}\\ \text{neka je } \beta \text{ ugao koji vektor}\\ \text{normale na } S \text{ zaklapa sa } y\text{-osom,}\end{array}\right|=\pm\iint\limits_E Q(x,\mu(x,z),z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z.$$

$$I_3=\iint\limits_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left|\begin{array}{c}S: z=\delta(x,y),\\ \text{neka je } F \text{ projekcija od } S \text{ na } x0y \text{ ravan,}\\ \text{neka je } \gamma \text{ ugao koji vektor}\\ \text{normale na } S \text{ zaklapa sa } x\text{-osom,}\end{array}\right|=\pm\iint\limits_F R(x,y,\delta(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Primjena površinskog integrala prve vrste - Izračunavanje površine dijela glatke površi.

$P=\iint\limits_S \mathrm{d}S=\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, gdje je D projekcija od S: $z=\eta(x,y)$ na $x0y$ ravan.

Stoksova formula. ...

Formula Gauss-Ostrogradski.

$$\iint\limits_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Integrali ovisni o parametru.

$I(\alpha)=\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)\mathrm{d}x \quad\Longrightarrow\quad I'(\alpha)=\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f'_\alpha(x,\alpha)\mathrm{d}x+b'(\alpha)f(b(\alpha),\alpha)-a'(\alpha)f(a(\alpha),\alpha).$

Ako granice a i b ne zavise od α tada $I'(\alpha)=\int\limits_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\mathrm{d}x.$

Vektorska teorija polja. ...

Cirkulacija i fluks vektorskog polja.

$$C=\int\limits_c \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{r}=\int\limits_c v_x\mathrm{d}x+v_y\mathrm{d}y+v_z\mathrm{d}z.$$

$$\Phi=\iint\limits_S \vec{v}\vec{n}\,\mathrm{d}S=\iint\limits_S v_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+v_y\mathrm{d}x\mathrm{d}z+v_z\mathrm{d}x\mathrm{d}z.$$